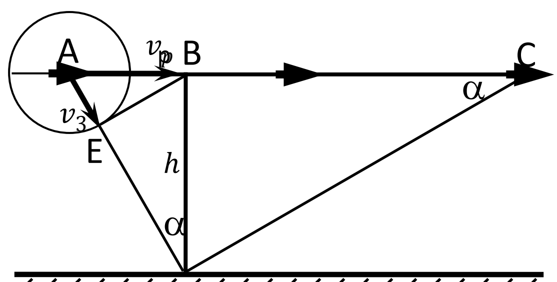
ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИИ»
2020-2021 УЧ. ГОД
Решения к задачам заключительного тура
11 класс

Вариант 1

<u>Задание 1.</u>

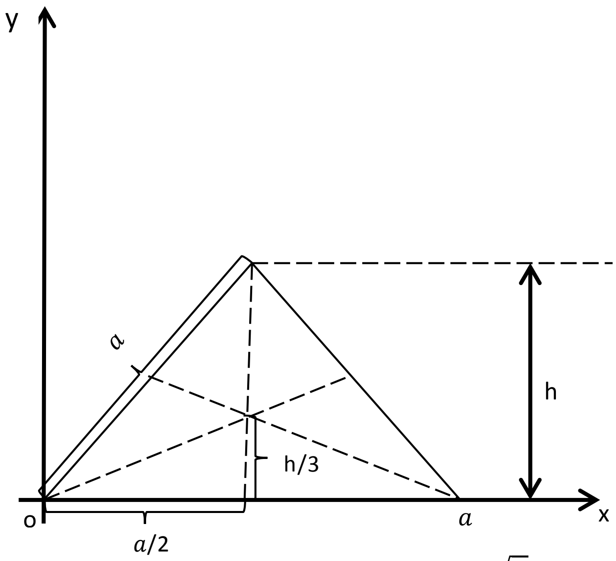
Дано:	СИ:	Решение:
h=4,2км t=12с v_3=333 м/с	4200 м	Звук – это сферическая волна. Из подобных треугольников для скоростей (v_3 – это скорость звука, v_p – это скорость реактивной сверхзвуковой летающей тарелки) и расстояний следует, что $cos\alpha = \frac{v_3 \cdot t}{h}$ и $sin\alpha = \frac{v_3 \cdot t}{v_p \cdot t} = \frac{v_3}{v_p}$; т.к. $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, то $v_p = \frac{v_3 \cdot h}{(h^2 - {v_3}^2 \cdot t^2)^{0,5}} = \frac{333 \cdot 4200}{(4200^2 - 333^2 \cdot 12^2)^{0,5}} = 1080$ *м/с* $= 1$ *км/с.* Ответ: v_p = 1 км/с.
Найти: v_p		



<u>Задание 2.</u>

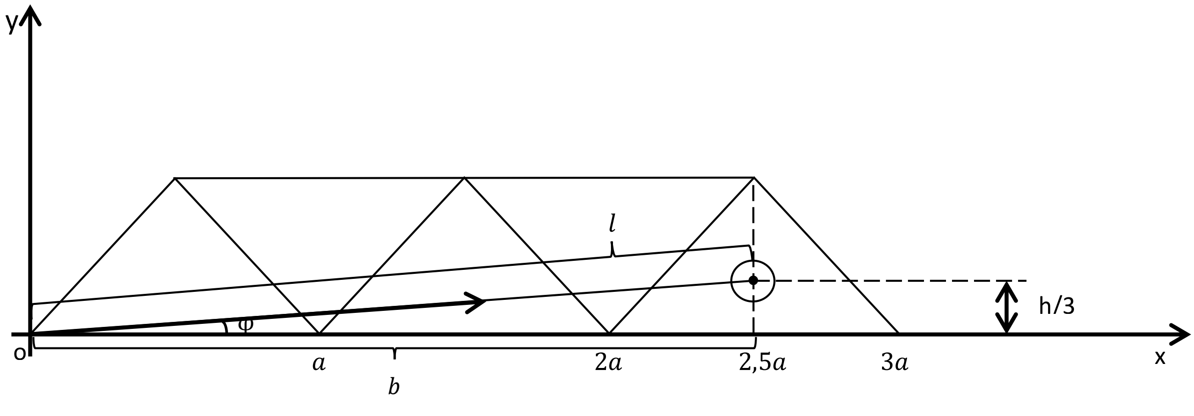
Дано:	СИ:	Решение:
α = 1 м V= 25 см/с	 0,25м/с	Пусть h – высота равностороннего треугольника

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{15}$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ R = 2 см	0,02м	$h = \sqrt{a^2-(a/2)^2} = a = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$
<u>Найти</u>: t		



Центр треугольника находится на расстоянии h/3 по оси OY; т.е. h/3= $a\frac{\sqrt{3}}{6}$

Так как треугольник равносторонний, то траекторию движения можно и развернуть:



l – длина гипотенузы прямоугольного треугольника движения

S = l – R => путь материальной точки о начальной движения до столкновения с окружностью.

$$\frac{h/3}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha = b = \frac{h/3}{tg\,\alpha} = a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} \Big/ \frac{\sqrt{3}}{15} = a\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot 15}{6\cdot\sqrt{3}} = 2{,}5a$$

$l = \sqrt{(2{,}5a)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = a\sqrt{6{,}25 + \frac{1}{12}} = a \cdot 2{,}5166 = 1 \cdot 2{,}5166 \text{ (м)} \approx 2{,}52 \text{ (м)}$

$S = l\text{-}R = 2{,}52 - 0{,}02 = 2{,}5$ (м)

$t = \frac{S}{V} = \frac{2{,}5}{0{,}25} = 10$ (с)

Ответ: t = 10с

Задание 3.

Вертикальная скорость передней поверхности колеса равна скорости автомобиля ***v***. За время 1/***n*** поверхность опустится на расстояние ***v***/***n*** . Это расстояние должно быть кратно целому числу расстояний между бороздками колеса: ***v***/***n*** = ***i*** 2**π*R***/***N***, где ***i*** - целое число. ***Ответ:*** ***v*** = ***i*** 2**π*Rn***/***N***, где ***i*** - целое число. Т.к. в задаче спрашивается с какой ***минимальной*** скоростью ехал автомобиль, то ***i*** = 1 и ***v*** = 4 км/ч.

Ответ: 4 км/ч.

Задание 4.

Составим уравнения для напряжений на вольтметрах в единицах ε/V:

$$-x + 1 = x/2 + \text{x}, \qquad \text{x} = \frac{2}{5}$$

$$\text{y} + 1 + \text{y} + 2 + \text{y} + \text{y} - z = 0, \qquad z = 4\text{y} + 3$$

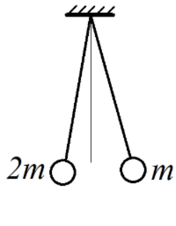
$$z + 1 + z + z - \text{y} = 0, \qquad \text{y} = 3z + 1, \qquad z = -\frac{7}{11}, \qquad \text{y} = -\frac{10}{11}$$

Поэтому $V_3 = (2/5)$ ε, V_5=(10/11) ε, V_8=(3/11) ε, V_{11}=(1/3) ε,

т.е. V_5=(10/11) 11=10В

Ответ: V_5=10В

Задание 5.



Напишем выражение для потенциальной энергии. Для этого необходимо воспользоваться формулой, выражающей длину основания равнобедренного треугольника, если известна боковая сторона ***L*** и угол при вершине **φ**: ***a*** **= 2*L* sin(φ/2)**

$U = \frac{2kq^2}{2L\sin(1/2(\alpha+\beta))} - mgL(2\cos(\alpha) + \cos(\beta))$

Минимум потенциальной энергии соответствует нулевым частным производным этого выражения по **α** и **β**. Получим

$$W\,\frac{\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = 2\sin\alpha = \sin\beta \qquad\qquad W = \frac{kq^2}{mgL^2}$$

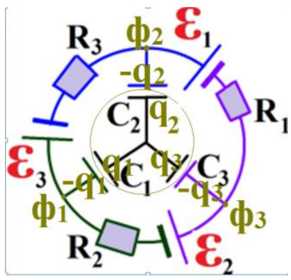
Учитывая, что ввиду малого кулоновского взаимодействия углы малы и, заменяя все синусы на их аргументы, а косинус на 1, получим **β** = 2**α** и **W** = 9**α**^{3}. Окончательный ответ:

α+β = $(3\,kq^2/mgL^2)^{(1/3)}$.

Так как $L = 10$ м, $q = 1$ нКл $= 10-9$ Кл, $m = 1$ г $= 0{,}001$ кг, $g = 10$ м/с^2 и k=9·10^9 Н·м^2/Кл^2, то φ = 0,003 рад.

Ответ: φ = 0,003 рад.

Задание 6.



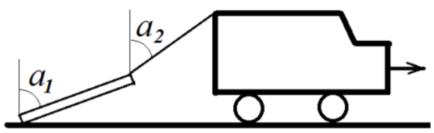
Заряд распределяется по внутренним обкладкам конденсаторов $q_1 + q_2 + q_3 = Q$. Потенциалы в точках соединения (смотри рисунок) определяются по формуле конденсатора (потенциал точки соединения всех трёх конденсаторов принимаем за ноль): $\varphi_1 = -\frac{q_1}{C_1}$, $\varphi_2 = -\frac{q_2}{C_2}$, $\varphi_3 = -\frac{q_3}{C_3}$. Исходя из этого, мы можем записать уравнения падения напряжения на каждом из участков: $\varphi_1 - \varphi_2 = -\mathcal{E}_3 + I\cdot R_3$, $\varphi_2 - \varphi_3 = -\mathcal{E}_1 + I\cdot R_1$, $\varphi_3 - \varphi_1 = -\mathcal{E}_2 + I\cdot R_2$, где

$I = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)/(R_1 + R_2 + R_3)$. Подставляем числовые значения: $I = 2$ А. $\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1}{C_1} = 5$ В; $\frac{q_3}{C_3} - \frac{q_2}{C_2} = -2$ В. Решая эти уравнения совместно с уравнением для суммы зарядов $q_1 + q_2 + q_3 = 22$мкКл**,** получим: q_1= 15 мкКл, q_2= 4 мкКл, q_3 = 3 мкКл

Ответ: q_1 = 15 мкКл.

Задание 7.

Рассмотрим равновесие балки.



1. Требование нулевого суммарного момента сил относительно нижнего конца балки даёт:

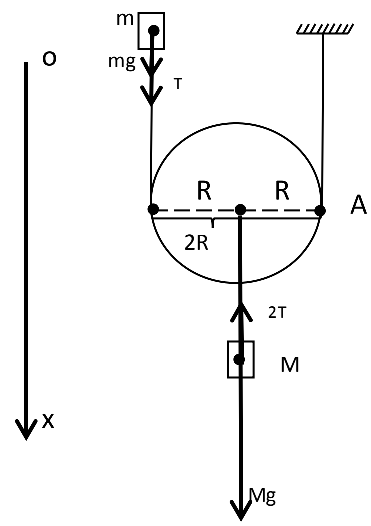
$$\tfrac{1}{2}\,mgL\sin\alpha 1 = LT\sin(\alpha 1 - \alpha 2).$$

2. Баланс сил по вертикали: $mg = N + T\cos\alpha 2$.

Эти уравнения дают $N = mg\,(sin\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2 - 2sin\,\alpha_2\,cos\,\alpha_1)\,/\,2sin(\alpha_1 - \alpha_2)$ и $T = mg\,sin\,\alpha_1/\,2sin(\alpha_1 - \alpha_2)$. Подставляя эти выражения в уравнения баланса сил по горизонтали $\mu N = T\,sin\,\alpha_2$, получаем окончательно $\mu = \left(ctg\,\alpha_2 - 2ctg\,\alpha_1\right)^{-1}$. Подставив $\alpha_1 = 70$ градусов и $\alpha_2 = 20$ градусов, получим $\mu = 0{,}5$.

Ответ: $\mu = 0{,}5$.

Задание 8.

Дано:	СИ:	Решение:	
m= 1 кг	-	Направим ось OX «вниз»	
M= 5 кг	-	Пусть радиус блока равен R	
g= 10 м/с^2	-	Пусть T – натяжение левой	
Найти: α		верхней нити	
		А - мгновенная ось вращения	
		Для поступательного движения (для малых скоростей) применим 2-й закон Ньютона:	
		$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i = m\cdot\vec{a}$	

Для тела m
Для тела M
$$\begin{cases} mg + T = 2a\cdot m \\ Mg - 2T = a\cdot M \end{cases}$$

Из 1-го $T = 2ma - mg$ одставим Т во 2-е уравнение

$$Mg - 2(2ma - mg) = a\cdot M$$

$$Mg - 4ma + 2mg = a\cdot M$$

$$Mg + 2mg = a\cdot M + 4am \Rightarrow g(M + 4ma) = a(M + 4m)$$

$$a = g\frac{M + 2m}{M + 4m};\, a = 10\frac{(5 + 2\cdot 1)}{5 + 4\cdot 1} = 10\frac{7}{9} = \frac{70}{9} = 7{,}78 \approx 8(\text{м/с}^2)$$

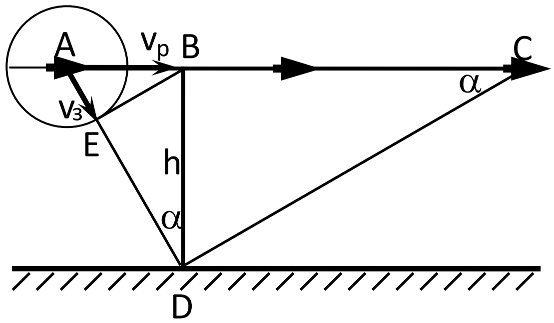
Ответ: $a \approx 8$ (м/с^2)

ФГАОУ ВО РУТ (МИИТ)
МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОТРАСЛЕВАЯ ОЛИМПИАДА
«ПАРУСА НАДЕЖДЫ»
ПО ПРОФИЛЮ «ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИИ»
2020-2021 УЧ. ГОД
Решения к задачам заключительного тура
11 класс

Вариант 2

Задание 1.

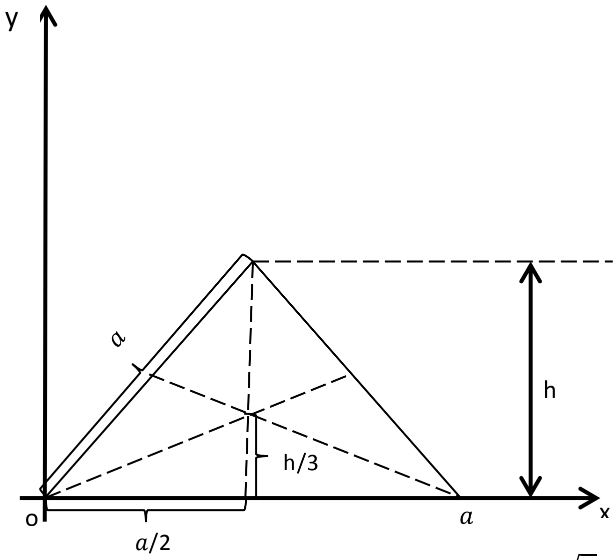
Дано: :	СИ:	Решение:
$v_р$=666 м/с t=22 с $v_з$=333 м/с Найти: h		Звук – это сферическая волна. Из подобных треугольников для скоростей ($v_з$ – это скорость звука, $v_р$ – это скорость реактивной сверхзвуковой летающей тарелки) и расстояний следует, что $\cos\alpha=(v_з\cdot t)/h$ и $\sin\alpha=(v_з\cdot t)/(v_р\cdot t)=v_з/v_р$; т.к. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, то $v_р=(v_з\cdot h)/(h^2-v_з{}^2\cdot t^2)^{0,5}$, поэтому h= 8 км. Ответ: h= 8 км.



Задание 2.

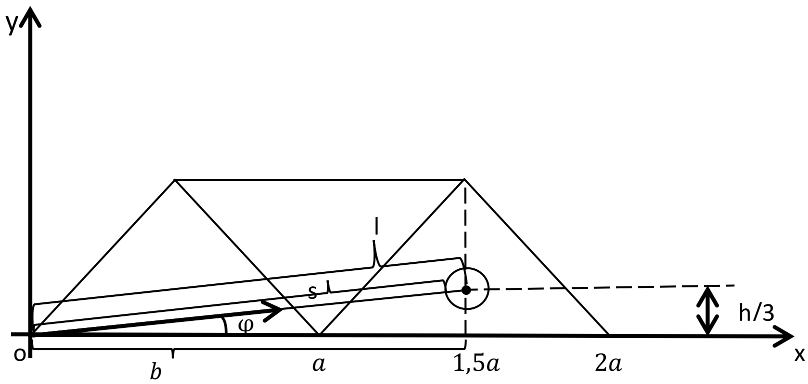
Дано:	СИ:	Решение:
α = 1 м V = 10 см/с	 0,1м/с	Пусть h – высота равностороннего треугольника

$\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ R = 2 см	0,02м	$h = \sqrt{a^2 - (a/2)^2} = a\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$
<u>Найти</u>: t		



Центр треугольника находится на расстоянии h/3 по оси OY; т.е. h/3= $a\frac{\sqrt{3}}{6}$

Т.к. треугольник равносторонний, то траекторию движения можно и развернуть:



l – длина гипотенузы прямоугольного треугольника движения

S = l – R => путь материальной точки о начальной движения до столкновения с окружностью.

b - катет треугольника, по гипотенузе которого движется материальная точка

$\frac{h/3}{b} = \tan\boldsymbol{\alpha} => b = \frac{h/3}{\tan\boldsymbol{\alpha}} = a\ \frac{\sqrt{3}}{6}\ /\frac{\sqrt{3}}{9} = a\ \frac{\sqrt{3}\cdot 9}{6\cdot\sqrt{3}} = 1{,}5a$

l = $\sqrt{(1{,}5a)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = a\sqrt{2{,}25 + \frac{1}{12}} = a \cdot 1{,}5275 = 1 \cdot 1{,}53 = 1{,}53$(м)

S = l-R = 1,53 – 0,02 = 1,51 (м)

$t = \frac{S}{V} = \frac{1,51}{0,1} = 15,1 \approx 15$ (с)

Ответ: t = 15с

Задание 3.

Вертикальная скорость передней поверхности колеса равна скорости автомобиля ***v***. За время 1/***n*** поверхность опустится на расстояние ***v***/***n*** . Это расстояние должно быть кратно целому числу расстояний между бороздками колеса: ***v***/***n*** = ***i*** 2**π*R***/***N***, где ***i*** - целое число.

Ответ: ***v*** = ***i*** 2**π*Rn***/***N***, где ***i*** - целое число. Т.к. в задаче спрашивается с какой ***минимальной*** скоростью ехал автомобиль, то ***i*** = 1 и ***v*** = 5 км/ч.

Ответ: 5 км/ч.

Задание 4.

Составим уравнения для напряжений на вольтметрах в единицах ε/V:

$$-x+1=x/2+x,\ x=2/5$$

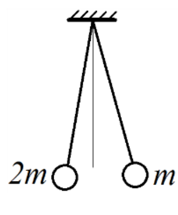
$$y+1+y+2+y+y-z=0,\ z=4y+3$$

$$z+1+z+z-y=0,\ y=3z+1,\ z=-7/11,\ y=-10/11$$

Поэтому $V_3=(2/5)\ \varepsilon$, $V_5=(10/11)\ \varepsilon$, $V_8=(3/11)\ \varepsilon$, $V_{11}=(1/3)\ \varepsilon$, т.е. $V_8=(3/11)\ 11=3$В

Ответ: $V_8=3$В

Задание 5.



Напишем выражение для потенциальной энергии. Для этого необходимо воспользоваться формулой, выражающей длину основания равнобедренного треугольника, если известна боковая сторона L и угол при вершине φ: $\boldsymbol{a = 2L\sin(\varphi/2)}$

$$\boldsymbol{U = 2kq^2/2L\sin(\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)) - mgL(\,2\cos(\alpha) + \cos(\beta)\,)}$$

Минимум потенциальной энергии соответствует нулевым частным производным этого выражения по **α** и **β**. Получим:

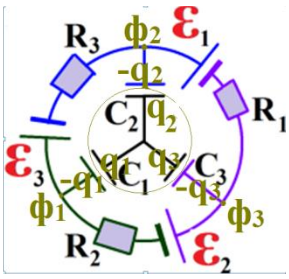
$$W\frac{\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = 2\sin\alpha = \sin\beta \qquad W = \frac{kq^2}{mgL^2}$$

Учитывая, что ввиду малого кулоновского взаимодействия углы малы и, заменяя все синусы на их аргументы, а косинус на 1, получим **β** = 2**α** и **W** = 9**α**^{3}. Окончательный ответ: **$\alpha+\beta = (3\, kq^2/mgL^2)^{(1/3)}$.**

Так как L = 10 м, q = 1 нКл = 10^{-9} Кл, m = 0,42 г = 0,00042 кг, g=10 м/с^2 и k=$9\cdot10^9$ Н·м^2/Кл^2, то φ = 0,004 рад.

Ответ: φ = 0,004 рад.

Задание 6.

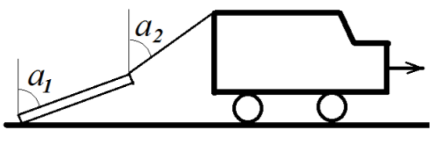


Заряд распределяется по внутренним обкладкам конденсаторов $\boldsymbol{q_1 + q_2 + q_3 = Q}$. Потенциалы в точках соединения (смотри рисунок) определяются по формуле конденсатора (потенциал точки соединения всех трёх конденсаторов принимаем за ноль): $\boldsymbol{\phi_1 = -q_1/C_1}$, $\boldsymbol{\phi_2 = -q_2/C_2}$, $\boldsymbol{\phi_3 = -q_3/C_3}$. Исходя из этого, мы можем записать уравнения падения напряжения на каждом из участков: $\boldsymbol{\phi_1 - \phi_2 = -\mathcal{E}_3 + I\cdot R_3}$, $\boldsymbol{\phi_2 - \phi_3 = -\mathcal{E}_1 + I\cdot R_1}$, $\boldsymbol{\phi_3 - \phi_1 = -\mathcal{E}_2 + I\cdot R_2}$, где $\boldsymbol{I = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3)/(R_1 + R_2 + R_3)}$. Подставляем числовые значения: $\boldsymbol{I = 2}$ А. $\boldsymbol{q_2/C_2 - q_1/C_1 = 5}$ **В** ; $\boldsymbol{q_3/C_3 - q_2/C_2 = -2}$ **В** . Решая эти уравнения совместно с уравнением для суммы зарядов $\boldsymbol{q_1 + q_2 + q_3 = 22}$ мкКл, получим: $\boldsymbol{q_1}$ = 15 мкКл, $\boldsymbol{q_2}$= 4 мкКл, $\boldsymbol{q_3}$ = 3 мкКл

Ответ: q_2 = 4 мкКл.

Задание 7.

Рассмотрим равновесие балки.



1. Требование нулевого суммарного момента сил относительно нижнего конца балки даёт: **½ $\boldsymbol{mgL}$ sin $\boldsymbol{\alpha_1 = LT \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$**.

2. Баланс сил по вертикали: $\boldsymbol{mg = N + T\cos\alpha_2}$.

Эти уравнения дают $\boldsymbol{N = mg\,(\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 - 2\sin\alpha_2 \cos\alpha_1) / 2\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$ и $\boldsymbol{T = mg\,\sin\alpha_1 / 2\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}$. Подставляя эти выражения в уравнения баланса сил по горизонтали $\boldsymbol{\mu N = T\sin\alpha_2}$, получаем окончательно $\boldsymbol{\mu = (\mathrm{ctg}\,\alpha_2 - 2\mathrm{ctg}\,\alpha_1)^{-1}}$. Подставив α_1 = 70 градусов и α_2 = 15 градусов, получим μ = 0,3.

Ответ: μ = 0,3.

Задание 8.

Дано: m= 1 кг, M= 5 кг, g= 10 м/с^2

Найти: T

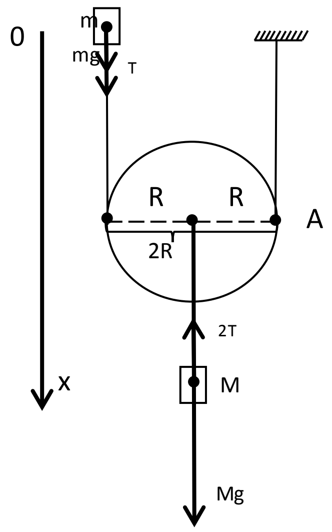
Перевод в СИ: -

Решение: Направим ось OX «вниз»

Пусть радиус блока равен R

Пусть T – натяжение левой верхней нити

A - мгновенная ось вращения



Для поступательного движения (для малых скоростей) применим 2-й закон Ньютона: :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

Для тела m
Для тела M
$$\begin{cases} mg + T = 2a \cdot m \\ Mg - 2T = a \cdot M \end{cases}$$

Из 1-го $T = 2ma - mg$ одставим T во 2-е уравнение

$$Mg - 2(2ma - mg) = a \cdot M$$

$$Mg - 4ma + 2mg = a \cdot M$$

$$Mg + 2mg = a \cdot M + 4am => g(M + 4ma) = a(M + 4m)$$

$a = g\frac{M+2m}{M+4m}$; $T = 2ma - mg$ = 2mg $\frac{M+2m}{M+4m} - mg$ = $mg\,(\frac{2(M+2m)}{M+4m} - 1)$ = $\frac{mg(2M+4m-M-4M)}{M+4m} = \frac{Mng}{M+4m} = \frac{5\cdot 1\cdot 10}{5+4\cdot 1} = \frac{50}{9}$ = 5,55 ≈ 6(Н)

Ответ: T= 6Н